MAI 1 - domácí úkol ze cvičení 4:

Limita posloupnosti:

1. Dokažte (a důkaz podrobně napište) aspoň jednu z následujících limit (užitím definice limity posloupnosti nebo i „jinak“):

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pro $a \in (0,\infty)$;

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} n(3+\sin n) = \infty$.

2. Dokažte, že platí (důkazy opět sepište podrobně) :

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a posloupnost $\{b_n\}$ je omezená $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n.b_n = 0$.

   (A odtud lze pak jednoduše určit např. limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin n$.)

   b) Jestliže existuje $n_0 \in N$ tak, že pro všechna $n > n_0$ je $a_n \le b_n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, pak také $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

   (A odtud opět lze snadno spočítat $\lim\limits_{n\to\infty} n(3+\sin n)$ a nebo $\lim\limits_{n\to\infty} (n+\sin n)$.)

3. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení (a dokažte, že platí nebo opravte tak, aby tvrzení platilo) :

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$, ($a \in R$);

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$, ($a \in R$);

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ($a \in R$).